2 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле

Магнитная жидкость представляет собой коллоидный раствор, получаемый диспергированием в определённой жидкой среде (вода и другие органические растворители) магнитных частиц ультрамикроскопического размера, покрытых поверхностно-активным веществом (ПАВ) с целью стабилизации дисперсной системы.

Под магнитными частицами подразумеваются однодоменные частицы ферромагнетика размером от 1 до 100 нм, в качестве которого чаще всего выступают следующие материалы – магнетит (FeO⋅Fe2O3), кобальт (Co) и никель (Ni).

Магнитный коллоид должен быть стабилен во времени, что означает отсутствие выпадения частиц в осадок. Во-первых, в нанометровом диапазоне размеров ферромагнитные частицы подвергаются броуновскому движению в жидкой основе, которое препятствует их оседанию в гравитационном поле. Именно поэтому и возникает необходимость использования частиц такого малого размера. Во-вторых, магнитные частицы на очень близких расстояниях друг от друга начинают испытывать притяжение за счёт сил ван-дер-ваальса и взаимодействия магнитных моментов. В результате слипания частиц образуется более крупный и массивный агрегат, который под действием силы тяготения осядет на дно. Поэтому в процессе приготовления магнитной жидкости применяются ПАВ, длинные молекулы которых покрывают поверхность каждой частицы, образуя защитный адсорбционный слой, препятствующий их сближению на близкое расстояние. В качестве ПАВ при производстве магнитных жидкостей наиболее часто применяется олеиновая кислота, а также полиизобутиленовый эфир янтарной кислоты и другие.

С физической точки зрения, ферромагнитная жидкость ведёт себя аналогично молекулам парамагнитного газа. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные частицы, каждая из которых имеет определённо направленный магнитный момент, ориентированы хаотично, поэтому весь объём магнитной жидкости имеет нулевую намагниченность. По мере увеличения напряжённости поля, магнитные моменты частиц стремятся выстроиться вдоль линий напряжённости. В слабых полях этому процессу мешает тепловое движение молекул жидкой основы, но в сильных полях частицы полностью упорядочены, их магнитные моменты направлены параллельно магнитному полю и намагниченность магнитной жидкости достигает насыщения.

В данном разделе будет рассмотрено явление неустойчивости поверхности ферромагнитной жидкости, граничащей с немагнитной газообразной внешней средой, во внешнем однородном ортогональном магнитном поле. Оно заключается в возникновении на границе раздела сред упорядоченной структуры из острых пиков конечной высоты (так называемого «ежа») при превышении некоторого критического значения напряжённости магнитного поля. Экспериментальные исследования условий возникновения неустойчивости в ортогональном магнитном поле были проведены Каули и Розенцвейгом в 1967 году [11].

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим слой магнитной жидкости, на поверхности которого распространяется периодическая плоская гравитационно-капиллярная волна с амплитудой и длиной волны , для которой выполняется условие . Пусть магнитная жидкость обладает свойствами идеальной несжимаемой жидкости и характеризуется массовой плотностью , коэффициентом поверхностного натяжения и магнитной проницаемостью .

Вся система находится во внешнем однородном, ортогональном невозмущённой поверхности, магнитном поле с вектором напряжённости . Поверхность жидкости граничит с внешней средой, обладающей магнитной проницаемостью (см. рисунок 2.1).

[рисунок]

Рисунок 2.1. Конфигурация задачи

Требуется получить дисперсионное уравнение для рассматриваемого волнового возмущения и на его основе вывести критерий неустойчивости поверхности слоя магнитной жидкости.

2.2 Потенциал магнитного поля

Прежде чем определить уравнения и граничные условия задачи применим упрощение, аналогичное приближению безвихревого движения жидкости (см. формулу (1.10)), а именно, пусть напряжённость магнитного поля определяется некоторой скалярной величиной , называемой потенциалом магнитного поля [11]:

где – функция времени и координат. Такое допущение корректно для рассматриваемой задачи, поскольку теорема о циркуляции магнитного поля (одно из системы уравнений Максвелла) [7, 9] в отсутствие токов и электрических полей имеет вид:

Также как и в случае с гидродинамическим потенциалом (1.10), это позволет значительно упростить задачу, так как происходит замена векторной величины скалярной функцией.

Распространение волны на поверхности вносит изменения в распределение потенциала магнитного поля вблизи этой поверхности, причём это изменение уменьшается с увеличением расстояния от поверхности. Так как по условию задачи рассматриваются малые волновые возмущения, то искажения потенциала также будут незначительными. Следовательно, к данной задаче применимы методы теории возмущений.

Согласно теории возмущений [8], потенциал магнитного поля можно представить в виде следующей суперпозиции:

 (3.2)

где  – потенциал поля над невозмущённой поверхностью жидкости,  – малая поправка к потенциалу, учитывающая изменение потенциала поля над возмущённой поверхностью жидкости.

Согласно (3.1) выражение (3.2) можно переписать и для напряжённости магнитного поля:

 (3.3)

где  – напряжённость поля над невозмущенной поверхностью жидкости,  – малая поправка к напряжённости, учитывающая изменение напряжённости поля над возмущённой поверхностью.

2.2 Давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости

Получим формулу для давления магнитного поля на поверхность магнитной жидкости в случае, когда это поле ортогонально поверхности.

Пусть для начала на поверхности отсутствуют какие-либо волновые возмущения, т.е. поверхность является идеально гладкой. Воспользуемся магнитной составляющей максвелловского тензора напряжений [?? Ландау стр. 111, ?? Розенцвейг стр. 95]:

где – магнитная проницаемость некоторой среды, – вектор напряжённости внешнего магнитного поля, – диадное произведение векторов (тензорное произведение вектора-столбца на вектор строку), – символ Кронекера.

Сила, действующая на единицу площади, может быть вычислена путём скалярного умножения вектора нормали к поверхности (см. рисунок 5.2) на тензор (5.1):

Снова скалярно умножим выражение (5.2) на вектор нормали, чтобы получить нормальную компоненту поверхностной плотности силы, т.е. давление (верхний индекс указывает на воздействующую среду):

После несложных преобразований легко увидеть, что первое слагаемое в скобках в (5.3) будет равно , а во втором слагаемом . Тогда выражение для давления магнитного поля на поверхность со стороны с магнитной проницаемостью будет выражаться формулой [16]:

Воспользуемся полученной формулой для определения суммарного давления на поверхность магнитной жидкости. Суммарное давление вычисляется как разность давления на поверхность со стороны магнитной жидкости и давления со стороны внешней среды :

Итак, как следует из соотношения (2.5) в случае гладкой горизонтальной поверхности суммарное давление направлено в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью, т.е. со стороны магнитной жидкости давление на границу выше (рисунок 2.2).

[рисунок]

Рисунок 2.2. Распределение давлений на поверхности

Обобщим формулу (2.5) для возмущённой поверхности. Заметим, что распространение волны приводит к периодическому изменению силовых линий магнитного поля вблизи этой поверхности, причём это изменение уменьшается с увеличением расстояния от поверхности. Так как по условию задачи рассматриваются малые волновые возмущения, то искажения магнитного поля также будут незначительными. Следовательно, к данной задаче применимы методы теории возмущений [8].

Согласно теории возмущений [8], напряжённость магнитного поля можно представить в виде следующей суперпозиции:

где – напряжённость магнитного поля вблизи невозмущенной поверхности жидкости, – малая поправка, учитывающая искажение поля при распространении волны. Тогда, заменив в формуле (2.5) на суперпозицию (2.6), получим:

где – давление магнитного поля на невозмущённую поверхность, – малая поправка, учитывающая искажение давления магнитного поля при распространении волны, и – возмущения напряжённостей магнитного поля в магнитной жидкости и во внешней среде соответственно. В формулах оставлены только слагаемые до 1 порядка малости включительно.

2.3 Математическая формулировка задачи

Введём двумерную систему координат, аналогичную той, которая была использована в разделе 1 (рисунок 1.2). Направление вектора ускорения свободного падения оставим неизменным.

Закон изменения свободной поверхности жидкости по-прежнему будем описывать функцией , заданной соотношением (1.1). Опираясь на результаты решения задачи о движении гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости из раздела 1, составим математическую формулировку текущей задачи.

*Уравнение несжимаемости:*

Поскольку магнитная жидкость по условию задачи является несжимаемой, уравнение (1.11) здесь также будет справедливо:

*Уравнения Лапласа для потенциалов магнитного поля:*

Запишем закон Гаусса для магнитного поля (одно из уравнений Максвелла) в магнитной жидкости и в атмосфере [7]:

 (3.11)

где  и  – векторы индукции магнитного поля в магнитной жидкости и в атмосфере соответственно.

Для изотропных сред существует соотношение, связывающее вектор индукции магнитного поля с вектором напряжённости. Считая, что рассматриваемые в задаче среды изотропны, запишем его для каждой из них [7]:

 (3.12)

С учётом этого, уравнения (3.11) перепишутся следующим образом:

 (3.13)

Для перехода от векторных величин  и  к скалярным функциям  и  в уравнениях (3.13) воспользуемся соотношением (3.1). В итоге получим уравнения для потенциала магнитного поля в магнитной жидкости и в атмосфере:

 (3.14)

Для удобства уравнения (3.14) заданы относительно невозмущённой поверхности жидкости .

Воспользуемся известной в электродинамике сплошных сред формулой для вычисления давления магнитного поля  (магнитного давления) на поверхность магнитной жидкости со стороны среды с магнитной проницаемостью  [16]:

 (3.4)

Таблица 2

Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| Уравнения | | |
|  |  | 1.11 |
| Граничные условия | | |
|  |  | 1.28 |
|  | 1.29 |
|  |  | 1.23 |

Для более короткой записи в таблице 1 и далее в этом разделе индексы, отображающие порядок малости, скрыты.